

1 Borne inférieure, borne supérieure

Exercice 1 ★★★ Quelques exemples –

Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures, inférieures.

1. $\{a + bn; n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a + (-1)^n b; n \in \mathbb{N}\}$
3. $\left\{a + \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$
4. $\left\{(-1)^n a + \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$
5. $\left\{a + (-1)^n \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}.$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[545]

Exercice 2 ★ Des exemples –

Les ensembles suivants sont-ils majorés ? minorés ? Si oui, déterminer leur borne inférieure, leur borne supérieure.

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x^2 < 2\} \quad B = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}; p, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[546]

Exercice 3 ★★★ Atteint ou non ? –

Les parties de \mathbb{R} suivantes sont-elles minorées, majorées ? Dans chaque cas, déterminer s'il y a lieu la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$A = \left\{\frac{n}{mn+1}; (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}, \quad B = \left\{\frac{n}{mn+1}; (m, n) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[547]

Exercice 4 ★★★ Plus petit et plus grand –

Soient A et B deux parties non-vides de \mathbb{R} telles que :

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b.$$

Démontrer que A est majoré, B est minoré et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[551]

Exercice 5 ★★★ Borne sup non atteinte –

Soit A une partie de \mathbb{R} majorée et on note $M = \sup A$. On suppose que $M \notin A$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]M - \varepsilon, M[$ contient une infinité d'éléments de A .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[548]

Exercice 6 ★★★ Diverses opérations –

Soient A et B deux parties non-vides et bornées de \mathbb{R} , et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$\begin{aligned} -A &= \{-a; a \in A\} & A+B &= \{a+b; a \in A, b \in B\} \\ x+A &= \{x+a; a \in A\} & AB &= \{ab; a \in A, b \in B\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
3. Montrer que $\sup(x + A) = x + \sup(A)$.
4. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[549]

Exercice 7 ★★★★★ Écart –

Soit A une partie non-vide et bornée de \mathbb{R} . On note $B = \{|x - y|; (x, y) \in A^2\}$.

1. Justifier que B est majorée.
2. On note $\delta(A)$ la borne supérieure de cet ensemble. Prouver que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[552]

Exercice 8 ★★★★★ Avec n termes –

1. Vérifier que, pour tous réels $x_i, x_j > 0$, on a

$$\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} = \frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i x_j} \geq 2.$$

2. Soit $n \geq 1$ fixé. Déterminer

$$\inf \left\{ (x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right); x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[553]

Exercice 9 ★★★★★ Application à l'existence d'un point fixe d'une application croissante de $[0, 1]$ –

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application croissante. On note $E = \{x \in [0, 1]; f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure b .
2. Prouver que $f(b) = b$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[550]

Exercice 10 ★★★★★ Sup de l'inf et inf du sup –

Soit A et B deux parties de \mathbb{R} non vides et $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. Comparer $\inf(\sup(f(x, y); x \in A); y \in B)$ et $\sup(\inf(f(x, y); y \in B); x \in A)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3080]

2 Nombres rationnels et irrationnels

Exercice 11 ★★★★★ Irrationnels! –

Démontrer que les réels suivants sont irrationnels :

1. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ où x et y sont des rationnels positifs tels que \sqrt{x} et \sqrt{y} sont irrationnels.
2. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[554]

Exercice 12 ★★★★★ Intervalles et rationnels –

Soient I et J deux intervalles ouverts. On suppose que $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \emptyset$. Démontrer que $I \cap J = \emptyset$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[555]

Exercice 13 ★★★★★ Homographie –

Soit x un nombre irrationnel et $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$. Prouver que, si $ad - bc \neq 0$, alors $\frac{ax+b}{cx+d}$ est un nombre irrationnel.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[556]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Commencer par essayer de décrire l'ensemble en écrivant les éléments obtenus pour les premières valeurs de n .

Indication pour l'exercice 2 ▲

Indication pour l'exercice 3 ▲

Indication pour l'exercice 4 ▲

Faire un dessin ! Pour l'inégalité, on pourra raisonner par l'absurde.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Raisonner par l'absurde en supposant que $]M - \varepsilon, M[\cap A$ est fini.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Il 'suffit' de revenir à la définition. Pour la 4ème question, remarquer que le produit de deux nombres négatifs est positif !

Indication pour l'exercice 7 ▲

1. Inégalité triangulaire.
 2. Double inégalité.
-

Indication pour l'exercice 8 ▲

- 1.
 2. Développer le produit et utiliser la question précédente pour obtenir un minorant. Montrer que ce minorant est atteint en choisissant tous les x_i égaux.
-

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Quel résultat garantit l'existence d'une borne supérieure ?
 2. Supposer $f(b) < b$ et trouver une contradiction. Supposer de même $f(b) > b$ et trouver une contradiction.
-

Indication pour l'exercice 10 ▲

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. Utiliser la quantité conjuguée.
 2. Raisonner par l'absurde, écrire $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r - \sqrt{5}$, mettre au carré et faire comme à la question précédente.
-

Indication pour l'exercice 12 ▲

Calculer $I \cap J$ si ce n'est pas vide, en fonction des bornes inférieures et supérieures de $I \cap J$.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Procéder par l'absurde et résoudre l'équation.

Correction de l'exercice 1 ▲

Dans la suite, on notera A l'ensemble considéré.

1. Les éléments de A sont $a, a+b, a+2b, \dots$. On a alors que A est minoré par a , et puisque $a \in A$, c'est la borne inférieure de A . A n'est pas majoré : on ne peut avoir $a+bn \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, sinon on aurait $n \leq (M-a)/b$ et \mathbb{N} serait majoré.

2. Si n est pair, $a+(-1)^n b = a+b$ et si n est impair, $a+(-1)^n b = a-b$. L'ensemble est donc constitué des deux éléments $a+b$ et $a-b$. Il est donc majoré, minoré, avec $\sup(A) = a+b$ et $\inf(A) = a-b$.

3. Les éléments successifs de A sont $a+b, a+\frac{b}{2}, a+\frac{b}{3}, \dots$. On voit facilement que A est majoré par $a+b$ et que A est minoré par a (on a bien $a \leq a+\frac{b}{n} \leq a+b$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). De plus, $a+b$ est élément de A , et donc $\sup(A) = a+b$. Enfin, prouvons que a est la borne inférieure de A . Si c est un minorant de A strictement supérieur à a , alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a + \frac{b}{n} \geq c \iff n \leq \frac{b}{c-a}.$$

Comme \mathbb{N} n'est pas majoré, c n'est pas un minorant de A . a est donc le plus grand des minorants de A , c'est sa borne inférieure.

4. Les éléments successifs de A sont $-a+b, a+\frac{b}{2}, -a+\frac{b}{3}, a+\frac{b}{4}, \dots$. On remarque que $-a$ est un minorant de A : en effet, pour tout entier $n \geq 1$, $(-1)^n a \geq -a$ (car $a > 0$) et $b/n > 0$. En utilisant le raisonnement précédent (mais en se limitant aux entiers impairs), on prouve que $-a = \inf(A)$. De plus, on a $-a+b \geq -a+\frac{b}{n}$ pour tout entier n impair et $a+\frac{b}{2} \geq a+\frac{b}{n}$ pour tout entier n pair. $\max(-a+b, a+\frac{b}{2})$ est donc un majorant de A . C'est aussi un élément de A , donc c'est sa borne supérieure.

5. Les éléments successifs de A sont $a-b, a+\frac{b}{2}, a-\frac{b}{3}, \dots$. On prouve alors que $a-b$ est un minorant de A et que $a+\frac{b}{2}$ est un majorant de A . Comme ils sont tous les deux éléments de A , ce sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de A .

Correction de l'exercice 2 ▲

On a $x^2 < 2 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ et A n'est rien d'autre que l'intervalle $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. C'est un intervalle borné, dont la borne inférieure est $-\sqrt{2}$ et dont la borne supérieure est $\sqrt{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq 1.$$

Ainsi, B est minoré par 0 et majoré par 1. De plus, $1 \in B$, dont 1 est un majorant de B qui est élément de B . C'est donc sa borne supérieure. Enfin, prouvons que 0 est la borne inférieure de A . Pour cela, on remarque que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Comme 0 est un minorant de B , ceci prouve que 0 est la borne inférieure de B . Le raisonnement est encore une fois très similaire. On remarque d'abord que, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^*$, on a

$$-1 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \leq 1.$$

Cette fois, ni 1 ni -1 ne sont atteints. Mais on peut s'en approcher aussi près qu'on veut, de sorte que ce sont bien les bornes supérieures et inférieures. Détaillons que $\sup C = 1$. Choisissons $\varepsilon > 0$. On souhaite trouver $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \geq 1 - \varepsilon.$$

Posons $n = 1$ et considérons p très grand de sorte que $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Alors, on a effectivement

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \geq 1 - \varepsilon,$$

et comme 1 est un majorant de C , on a $1 = \sup C$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Commençons par A . On a, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \frac{n}{nm+1} \leq \frac{n}{nm} \leq \frac{1}{m} \leq 1.$$

A est donc minorée par 0 et majorée par 1. Montrons que $\inf(A) = 0$. Si $c > 0$ est un minorant de A , alors pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a

$$c \leq \frac{n}{nm+1}.$$

Prenons $n = 1$, on obtient

$$c \leq \frac{1}{m+1} \iff m \leq \frac{1}{c} - 1.$$

Comme ceci doit être vrai pour tout entier $m \geq 1$, c'est une contradiction car \mathbb{N} n'est pas majoré. Ainsi, 0 est le plus grand des minorants de A , et $\inf(A) = 0$. Démontrons de même que $1 = \sup(A)$. Si $d < 1$ est un majorant de A , alors pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a

$$d \geq \frac{n}{nm+1}.$$

Pour $m = 1$, on obtient

$$d \geq \frac{n}{n+1} \iff d \geq n(1-d) \iff n \leq \frac{d}{1-d}.$$

Cette inégalité est impossible à réaliser pour tout entier n , et donc $\sup(A) = 1$. De plus, 0 n'est pas un élément de A -c'est trivial, et 1 non plus car on a toujours $nm+1 > n$ pour $n, m \geq 1$. Étudions désormais B . 0 est toujours un minorant de B , mais cette fois il est aussi élément de B . On a donc $\inf(B) = \min(B) = 0$. De plus, on a $\mathbb{N} \subset B$ (choisir $m = 0$). Ainsi, B n'est pas majoré.

Correction de l'exercice 4 ▲

Fixons $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$. Alors, pour tout $b \in B$, on a $a_0 \leq b$ et donc a_0 est un minorant de B . De même, b_0 est un majorant de A . Ainsi, B admet une borne inférieure et A admet une borne supérieure. Supposons par l'absurde que $\sup(A) > \inf(B)$, et posons $u = \frac{\sup(A) + \inf(B)}{2}$. Alors on a $\inf(B) < u < \sup(A)$. En particulier, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a > u$ et $b < u$. On obtient $a > b$, une contradiction avec les hypothèses.

Correction de l'exercice 5 ▲

On raisonne par l'absurde, et on suppose que $]M - \varepsilon, M[\cap A$ est fini. Soit $\{a_1, \dots, a_p\} =]M - \varepsilon, M[\cap A$. Posons $a = \max(a_1, \dots, a_p)$. Alors $a < M$. On pose $\delta = M - a$. On a $\delta > 0$, donc il existe $a_{p+1} \in A$ tel que $M - \delta < a_{p+1} \leq M$. On a même $a_{p+1} < M$ car $M \notin A$. De plus, $a_{p+1} > M - \delta = a \geq M - \varepsilon$. On en déduit que $a_{p+1} \in]M - \varepsilon, M[$ et que $a_{p+1} \neq a_i, i = 1, \dots, p$. Ceci contredit l'hypothèse initiale.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soit $m = \inf(A)$ et notons $M = -m$. Alors, pour tout $a \in A$, on a $m \leq a$ ce qui implique $-a \leq M$. Ainsi, M majore $-A$. De plus, soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $m \leq a \leq m + \varepsilon$. Multipliant cette inégalité par -1, on trouve que

$$M - \varepsilon \leq -a \leq M.$$

C'est bien que $M = \sup(-A)$.

2. Notons $M = \sup(A) + \sup(B)$. Soit $x \in A + B$, x s'écrit $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Alors $a \leq \sup(A)$, $b \leq \sup(B)$ et donc en effectuant la somme, on trouve

$$a + b \leq M.$$

M est donc un majorant de $A + B$. De plus, soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon/2 \leq a \leq \sup(A)$, et il existe $b \in A$ tel que $\sup(B) - \varepsilon/2 \leq b \leq \sup(B)$. Faisant la somme de ces deux inégalités, on trouve

$$M - \varepsilon \leq a + b \leq M.$$

Ceci achève la preuve que $M = \sup(A + B)$.

3. On peut reprendre le raisonnement précédent, ou tout simplement appliquer le résultat précédent avec $B = \{x\}$.

4. Le raisonnement utilisé aux questions précédentes ne marche pas ici, car le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif. Prenons par exemple $A = \{-1, 0\}$ et $B = \{-2\}$. Alors $AB = \{0, 2\}$ et $\sup(AB) = 2 \neq \sup(A) \times \sup(B) = 0$. Le résultat est cependant vrai si $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$. La preuve est tout à fait similaire à celle produite un peu plus haut pour la somme.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Soient $(x, y) \in A^2$ et soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \in A \implies |x| \leq M$. Alors on a

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2M,$$

ce qui prouve que B est majoré.

2. Posons $m = \inf(A)$ et $M = \sup(A)$. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a

$$m \leq x \leq M \text{ et } -M \leq -y \leq -m \implies -(M - m) \leq x - y \leq M - m$$

d'où on tire $|x - y| \leq M - m$. On en déduit donc que $M - m$ est un majorant de B et que $\delta(A) \leq M - m$. Pour prouver l'autre inégalité, on fixe $\varepsilon > 0$, et on construit un élément $b \in B$ tel que $b > M - m - \varepsilon$. Pour cela, on sait qu'il existe $(x, y) \in A^2$ tels que

$$x \geq M - \varepsilon/2 \text{ et } y \leq m + \varepsilon/2.$$

Alors $x - y \geq M - m - \varepsilon$, ce qui est le résultat voulu. On a donc bien $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. La première égalité est claire. Pour la seconde, on remarque que

$$(x_i - x_j)^2 \geq 0 \iff x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j \geq 0 \iff \frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i x_j} \geq 2.$$

2. Prenons x_1, \dots, x_n dans \mathbb{R}_+^* . Alors, en développant le produit, on obtient :

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = n + \sum_{i < j} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \right).$$

Chaque terme de la somme est minorée par 2 d'après la question précédente, et il y a $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ éléments dans la somme. On en déduit que

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n + 2 \binom{n}{2} = n + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

Ainsi, n^2 est un minorant de l'ensemble. Mais c'est aussi un élément de l'ensemble. Il est atteint en choisissant $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$. Ainsi, n^2 est la borne inférieure (et même le minimum) de l'ensemble considéré.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. E est une partie non-vide (car elle contient 0), et majorée (par 1) de \mathbb{R} . Elle admet donc une borne supérieure que l'on note b .

2. On va raisonner par l'absurde pour démontrer que $f(b) = b$.

Si $f(b) < b$, comme b est le plus petit des majorants de E , $f(b)$ ne majore pas E . Il existe donc un élément c de E tel que $f(b) < c \leq b$. Mais alors $f(c) \geq c > f(b)$ alors que $c \leq b$. Ceci contredit que f est croissante. Si $f(b) > b$, comme f est croissante, on a $f(f(b)) \geq f(b)$, et donc $f(b) \in E$, ce qui est impossible puisque $f(b)$ est strictement supérieur à la borne supérieure de E .

3. Si $f(b) < b$, comme b est le plus petit des majorants de E , $f(b)$ ne majore pas E . Il existe donc un élément c de E tel que $f(b) < c \leq b$. Mais alors $f(c) \geq c > f(b)$ alors que $c \leq b$. Ceci contredit que f est croissante.

4. Si $f(b) > b$, comme f est croissante, on a $f(f(b)) \geq f(b)$, et donc $f(b) \in E$, ce qui est impossible puisque $f(b)$ est strictement supérieur à la borne supérieure de E .

Correction de l'exercice 10 ▲

Commençons par fixer $x_0 \in A$ et soit $y \in B$. Alors on a

$$f(x_0, y) \leq \sup(f(x, y); x \in A).$$

Passons à la borne inférieure dans cette inégalité pour $y \in B$. On a donc

$$\inf(f(x_0, y); y \in B) \leq \inf(\sup(f(x, y); x \in A); y \in B).$$

On prend alors la borne supérieure sur $x_0 \in A$ et on trouve l'inégalité

$$\sup(\inf(f(x_0, y); y \in B); x_0 \in A) \leq \inf(\sup(f(x, y); x \in A); y \in B)$$

ce qui donne une inégalité sur les quantités comparées.

Il n'existe pas d'inégalité dans l'autre sens. Pour s'en convaincre, prenons $A = [0, 1]$, $B = [0, 1]$ et $f(x, y) = |x - y|$. Fixons $x \in A$. Alors $\inf(f(x, y); y \in B) = 0$ puisqu'il suffit de choisir $y = x$. Et donc, $\sup(\inf(f(x, y); y \in B); x \in A) = 0$. En revanche, si on fixe $y \in B$, alors

$$\sup(f(x, y); x \in A) \geq 1/2$$

(on choisit $x = 0$ ou $x = 1$ suivant que $y \geq 1/2$ ou $y \leq 1/2$). On a donc

$$\inf(\sup(f(x, y); x \in A); y \in B) \geq 1/2.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Imaginons que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ soit un rationnel (non nul). Alors, on a

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

et donc $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ est aussi un rationnel. Écrivant

$$2\sqrt{x} = (\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}),$$

on trouve que \sqrt{x} est rationnel, une contradiction.

2. Imaginons que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ soit un rationnel $r > 0$. Alors on a

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = r - \sqrt{5} \implies 2 + 2\sqrt{6} + 3 = r^2 + 5 - 2r\sqrt{5}$$

et donc $r\sqrt{5} + \sqrt{6}$ est un rationnel. On raisonne alors comme à la question précédente pour prouver que la quantité conjuguée

$$r\sqrt{5} - \sqrt{6} = \frac{5r^2 - 6}{r\sqrt{5} + \sqrt{6}}$$

est aussi rationnel et donc que $\sqrt{6}$ l'est aussi. C'est la contradiction que l'on recherchait !

Correction de l'exercice 12 ▲

Supposons qu'il existe a dans $I \cap J$. Puisque $a \in I$, intervalle ouvert, il existe $r_1 > 0$ tel que $]a - r_1, a + r_1[\subset I$. De même, puisque $a \in J$, intervalle ouvert, il existe $r_2 > 0$ tel que $]a - r_2, a + r_2[\subset J$. Posons $r = \min(r_1, r_2)$. Alors :

$$]a - r, a + r[\subset I \cap J.$$

Mais dans l'intervalle ouvert $]a - r, a + r[$, il existe toujours un autre rationnel. Une autre façon de rédiger les choses est de dire que l'intersection de deux intervalles ouverts est ou bien vide, ou bien un intervalle ouvert (question : quelles sont ses bornes ?). Dans un intervalle ouvert non réduit à un point, il y a toujours un rationnel.

Correction de l'exercice 13 ▲

Supposons que $\frac{ax+b}{cx+d}$ soit un rationnel q . Alors on obtient

$$ax + b = qcx + dq \iff (a - qc)x = dq - b.$$

Si $a - qc \neq 0$, on obtient que $x = (dq - b)/(a - qc)$ est à la fois :

irrationnel par choix de x ; rationnel comme quotient de rationnels.

C'est une contradiction. Si $a - qc = 0$, puisque $x \neq 0$, on a $dq - b = 0$ et donc $ad - bc = 0$, ce qui est là-aussi une contradiction.
